بسم الله الرحمن الرحیم

درس تحقیق در عملیات ۱

استاد: اکرم سلطان پور

سرفصل درس :

- تعریف، تاریخچه، ویژگی‌های تحقیق در عملیات، مدل، انواع آن، فرآیند مدل سازی، کلیاتی از تحقیق در عملیات نرم و سخت
- مدل سازی مسائل دنیای واقعی در قالب برخی از مسائل از نوع برنامه‌ریزی خطی (مدل‌های ترکیب مواد، برنامه‌ریزی تولید، سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای، برش، برنامه‌ریزی نیروی انسانی و ...)
- مروری بر مفاهیم برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی و سیمپلکس، در شکل‌های متعارف و غیر متعارف
- آشنایی با مفاهیم مساله ثانویه، اهمیت و ضرورت مساله ثانویه نحوه ساخت و ایجاد مساله ثانویه، تفسیر اقتصادی مساله ثانویه بررسی و تحلیل روابط بین جداول نهایی مساله اولیه و ثانویه
- روش سیمپلکس ثانویه؛ بررسی و تحلیل روابط بین جداول نهایی مساله اولیه و ثانویه
- حل مسائل اولیه و ثانویه و تعیین رابطه بین آنها

مسأله ترکیب تولید

شرکتی می‌خواهد بداند که از هر یک از سه محصولش چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع حداکثر سود کل را نایل شود. نیروی کار و مواد مورد نیاز و همچنین سهم سود هر یک از سه محصول در جدول زیر آمده است:

منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	مقدار در دسترس
	منابع مورد نیاز			
نیروی کار (ساعت / واحد)	۵	۲	۴	۲۴۰ ساعت
مواد (کیلوگرم / واحد)	۴	۶	۳	۴۰۰ کیلوگرم
سهم سود هر واحد	۳	۵	۲	—

نیروی کار موجود روزانه ۲۴۰ ساعت و مواد در دسترس در هر روز ۴۰۰ کیلوگرم می‌باشد. هدف تعیین مقدار تولید از سه محصول است به طوری که سود کل حاصل از تولید آنها حداکثر شود. حال این مسأله را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی با عنایت به چارچوب بیان شده در بخش ۲. ۲ فرموله می‌کنیم.

حل

متغیرهای تصمیم مسأله :

سه متغیر تصمیم این مسأله، مقدار تولید محصول ۱، ۲ و ۳ است که باید در طول روز تولید شوند. این مقادیر را می‌توان با نمادهای زیر بیان نمود:

مقدار تولید از محصول ۱ : x_1

مقدار تولید از محصول ۲ : x_2

مقدار تولید از محصول ۳ : x_3

تابع هدف :

تابع هدف مسأله، حداکثر کردن سود کل حاصل از تولید سه محصول است. کل سود، از مجموع سود هر سه محصول بدست می‌آید. سود هر محصول از حاصلضرب سود ناشی از هر یک واحد در مقدار تولید آن بدست می‌آید. سود محصول ۱، از ضرب، سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن، $۳x_1$، و سود محصول ۲، از ضرب سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن، $۵x_2$، و سود محصول ۳، از ضرب سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن، $۲x_3$، بدست می‌آید. بنابراین سود کل، Z، عبارت است از:

$$\text{Maximize } Z = ۳x_1 + ۵x_2 + ۲x_3$$

محدودیتهای مدل :

در این مسأله، محدودیتها شامل مقادیر محدود نیروی کار و مواد در دسترس برای تولید هستند. تولید هر یک از سه محصول به نیروی کار و مواد بستگی دارد. نیروی کار لازم برای تولید هر یک واحد از محصول اوّل ۵ ساعت است. بنابراین کل نیروی کار لازم برای تولید محصول ۱، $۵x_1$ است. همینطور محصول ۲ مساوی با، $۲x_2$ ساعت و محصول ۳ مساوی با $۴x_3$ ساعت نیروی کار نیاز دارند. کل موجودی نیروی کار نیز ۲۴۰ ساعت است. بنابراین محدودیت نیروی کار عبارت است از:

$$۵x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 \leq ۲۴۰ \qquad \text{نیروی کار - ساعت}$$

محدودیت مواد نیز به همین طریق فرموله می‌شود. برای تولید هر یک واحد محصول ۴ کیلوگرم مواد، برای هر واحد محصول ۲، ۶ کیلوگرم و برای هر واحد از محصول ۳، سه کیلوگرم مواد مورد نیاز است. پس می‌توان محدودیت مواد را بدین گونه نوشت:

$$۴x_1 + ۶x_2 + ۳x_3 \leq ۴۰۰ \qquad \text{مواد - کیلوگرم}$$

علاوه بر محدودیتهای فوق، دسته‌ای دیگر از محدودیتها را باید اضافه کرد که بیان کنندهٔ «نامنفی بودن» متغیرهای تصمیم می‌باشند. چراکه تولید منفی از یک محصول غیرمنطقی و نامفهوم است. این محدودیتها از نظر ریاضی چنین بیان می‌شوند:

$x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ و $x_3 \geq 0$.

در اکثر مسائل برنامه‌ریزی خطی شرط نامنفی بودن متغیرها وجود دارد. امّا چنانچه مسأله‌ای مستلزم استفاده از متغیرهای منفی باشد می‌توان روش حل مسایل برنامه‌ریزی خطی را باز هم بکار برد. وجود یک یا چند متغیر منفی در مسأله برنامه‌ریزی خطی زمانی رخ می‌دهد که متغیر تصمیم بیانگر سود یا زیان شرکت و یا نرخ رشد تولید یا نرخ کاهش تولید باشد. زیان‌ده بودن بازده شرکت و یا کاهش نرخ رشد به معنای وجود یک متغیر تصمیم است.

در فرموله کردن محدودیتهای مدل، این سؤال ممکن است مطرح شود که چرا از نامساوی $\leq$ استفاده شده است در حالی که از تساوی (=) نیز می‌توان استفاده کرد. شرط تساوی به معنی مصرف تمام منابع در تولید سه محصول است. در حالی که شرط کوچکتر یا مساوی ($\leq$) اجازه می‌دهد که اگر شرط بهینگی (جواب نهایی) ایجاب نماید، مقداری از منابع بدون استفاده باقی بماند. در بعضی از موارد راه حلی که مقداری از منبعی را بدون استفاده باقی می‌گذارد، نتیجه‌ای بهتر یا سودی بیشتر، در مقایسه با جوابی که تمام منابع را استفاده می‌کند نتیجه می‌دهد. نامساوی $\leq$ به سادگی شرایط انعطاف‌پذیری برای این گونه موارد پدید می‌آورد.

مدل خلاصه شدهٔ مسأله ترکیب تولید :

مسأله برنامه‌ریزی خطی را به طور کامل و استاندارد به صورت زیر می‌توان خلاصه نمود:

بیشینه کردن $Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$

به شرط آنکه :

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$

$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$

x_1 و x_2 و $x_3 \geq 0$

مثال) شرکتی می‌خواهد بداند از هر یک از ۳ محصولاتش چقدر تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع، حداکثر سود

کل نائل شود. نیروی کار و مواد اولیه و همچنین سود هر یک از ۳ محصول در جدول آمده است.

منابع	منابع مورد نیاز: محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	مقدار در دسترس
نیروی کار (ساعت / واحد)	۵	۲	۴	۲۴۰ ساعت
مواد اولیه (کیلوگرم / واحد)	۴	۶	۳	۴۰۰ کیلوگرم
سطح سود هر واحد	۳	۵	۲	

ضرایب قیمت

متغیرهای تصمیم (Decision variable):

x_1 : میزان تولید از محصول یک

x_2 : میزان تولید از محصول ۲

x_3 : میزان تولید از محصول ۳

تابع هدف — ضرایب قیمت یا هزینه

$$\text{Max}\,Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

objective Function

یک عدد ۱	۳
x_1	$3x_1$

→ اصل تناسب در مدل

S.t: (Subject to)

محدودیت‌های کارکردی:

ضرایب تکنولوژی — منابع

$$\underbrace{5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240}_{\text{محدودیت نیروی انسانی}}$$ محدودیت نیروی انسانی

ضرایب تکنولوژی — منابع

$$\underbrace{4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400}_{\text{محدودیت مواد}}$$ محدودیت مواد اولیه

$$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0}_{\text{محدودیت‌های علامت}}$$ محدودیت‌های علامت

APCO

شرایطی که یک مدل خطی دارد:

۱- اصل تناسب: اگر در مدل { ۱- تخفیف، ۲- مصرف جزئی، ۳- هزینه اولیه } داشته باشیم ⟸ تناسب برقرار نیست

۲- اصل جمع‌پذیری

۳- اصل قطعیت

۴- اصل تقسیم‌پذیری (اصل بخش‌پذیری)

۲.۳.۵ مسأله حمل‌ونقل

یک شرکت حمل‌ونقل درصدد حمل تلویزیونهای تولیدی از سه کارخانه به سه شهر مختلف است. عرضهٔ ماهانه هر کارخانه و تعداد تقاضای ماهانهٔ هر شهر در جداول زیر داده شده است:

کارخانه	عرضه تلویزیون (دستگاه)
۱. تهران	۳۰۰
۲. اراک	۲۰۰
۳. اصفهان	۲۰۰

شهر	تعداد تقاضا
A - شیراز	۱۵۰
B - بوشهر	۲۵۰
C - اهواز	۲۰۰

هزینهٔ حمل هر دستگاه تلویزیون از هر کارخانه به هر شهر به نسبت مسافت و کیفیت راه تغییر می‌کند و به شرح جدول زیر است (هزینه حمل به تومان است).

از کارخانه	به شهر A	B	C
۱	۱۶	۱۸	۱۱
۲	۱۴	۱۲	۱۳
۳	۱۳	۱۵	۱۷

مسأله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن تأمین تقاضای هر شهر، کل هزینهٔ حمل نیز حداقل گردد:

متغیرهای تصمیم :

این مسأله دارای ۹ متغیر تصمیم است که بیانگر تعداد تلویزیون (دستگاه) حمل شده از هر کارخانه به هر شهر خواهد بود. یعنی:

x_{ij} : تعداد تلویزیون قابل حمل از کارخانه i ام به شهر j ام

که در آن؛

$i =$ (۱) تهران و (۲) اراک و (۳) اصفهان

$j =$ (A) شیراز و (B) بوشهر و (C) اهواز

خواهد بود.

برخلاف مسائل قبلی، متغیر تصمیم در این مسأله دارای دو «اندیس» می‌باشد. اندیس اوّل (i) بیانگر نام کارخانه و اندیس دوم (j) نشان‌دهندهٔ نام شهر خواهد بود. به عنوان مثال x_{3A} بیانگر تعداد تلویزیونی است که از کارخانه شماره ۳ (اصفهان) به شهر A (شیراز) حمل می‌شود.

تابع هدف :

تابع هدف عبارتست از حداقل کردن کل هزینهٔ حمل‌ونقل می‌باشد. بنابراین تابع هدف که‌از مجموع هزینهٔ حمل تلویزیون از هر کارخانه به هر شهر بدست می‌آید. به شرح زیر خواهد بود:

$$\text{Minimize } Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$$

محدودیتهای مدل :

محدودیتهای این مسأله از تعداد تلویزیون قابل عرضه در هر کارخانه و تعداد تقاضای هر شهر ساخته می‌شوند. در مجموع شش محدودیت کارکردی برای مسأله وجود دارد. یک محدودیت به ازای هر کارخانهٔ عرضه‌کننده و یکی به ازای هر شهر تقاضاکننده، برای مثال کارخانه‌ای که در شهر تهران وجود دارد حداکثر می‌تواند ۳۰۰ دستگاه تلویزیون را به شهرهای متقاضی ارسال کند. بنابراین محدودیت عرضهٔ شهر ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

عرضه کارخانهٔ تهران ـ تلویزیون $x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 300$

محدودیت عرضه، به دو دلیل باید به صورت کوچکتر یا مساوی (≤) تعریف شود. اوّل اینکه بیشتر از ۳۰۰ دستگاه قابل حمل نیست، چون کل ظرفیت کارخانهٔ ۱، ۳۰۰ دستگاه است و دوّم اینکه اگر کمتر از ۳۰۰ دستگاه ارسال شود، هیچ مشکلی پدید نمی‌آید، چون کل عرضه

کارخانه‌ها ۱۰۰ واحد بیشتر از کل تقاضای شهرها می‌باشد. با همین استدلال محدودیتهای عرضه برای کارخانه‌های ۲ و ۳ به صورت ≤ تعریف می‌شوند. بدین صورت:

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 200$ عرضه کارخانهٔ اراک ـ تلویزیون

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 200$ عرضهٔ کارخانهٔ اصفهان ـ تلویزیون

سه محدودیت دیگر که بیانگر تعداد تقاضای هر شهر می‌باشد، قابل تعریف می‌باشند. به طوری که تعداد تلویزیون ارسالی از سه کارخانه به هر شهر باید تقاضای آن شهر را برآورده سازد. محدودیتهای تقاضا باید به صورت مساوی تعریف شوند. چون همهٔ تقاضا قابل دستیابی می‌باشد.

بنابراین داریم:

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$ تقاضای شهر شیراز ـ تلویزیون

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$ تقاضای شهر بوشهر ـ تلویزیون

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$ تقاضای شهر اهواز ـ تلویزیون

خلاصه مدل :

با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی، مدل کامل برنامه‌ریزی خطی برای مسأله حمل‌ونقل به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\text{Min } Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$$

s.t.

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 300$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 200$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 200$$
$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ و } j = A, B, C)$$

مسأله تخصیص

مدیر یک بیمارستان می‌خواهد ۴ کارمند را به ۴ شغل تخصیص دهد. حقوق هر کارمند برای هر شغل در طول داده در جدول زیر آمده است.

کارمند \ شغل	۱	۲	۳	۴
۱	۱۰۰۰	۹۵۰	۲۵۰۰	۱۲۰۰
۲	۱۵۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۹۰۰
۳	۱۲۰۰	۱۱۰۰	۲۲۰۰	۱۱۰۰
۴	۱۳۰۰	۹۰۰	۲۳۰۰	۱۲۰۰

هر کارمند فقط یک شغل می‌تواند اختیار کند و هر شغل هم به

محدودیت کارمند — محدودیت

یک کارمند می‌تواند اختصاص داده شود.

شغل

در فرموله کردن مسئله به مدیر بیمارستان به طوری که تخصیص را با کمترین هزینه انجام دهد، کمک کنید.

هدف Min

متغیرهای تصمیم

x_{11} : امکان تخصیص کارمند ۱ به شغل ۱

x_{12} : " " " ۱ به شغل ۲

x_{13} : " " " ۱ به شغل ۳

x_{14} : " " " ۱ به شغل ۴

x_{31} : " " " ۳ به شغل ۱

x_{32} : " " " ۳ به شغل ۲

x_{33} : " " " ۳ به شغل ۳

x_{34} : " " " ۳ به شغل ۴

x_{21} : " " " ۲ به شغل ۱

x_{22} : " " " ۲ به شغل ۲

x_{23} : " " " ۲ به شغل ۳

x_{24} : " " " ۲ به شغل ۴

x_{41} : " " " ۴ به شغل ۱

x_{42} : " " " ۴ به شغل ۲

x_{43} : " " " ۴ به شغل ۳

x_{44} : " " " ۴ به شغل ۴

فصل دوم

مدل مسئله تخصیص

$$\text{Min } Z = 1000x_{11} + 950x_{12} + 2500x_{13} + 1300x_{14} + 1500x_{21} + 1000x_{22}$$
$$+ 2000x_{23} + 900x_{24} + 1200x_{31} + 1100x_{32} + 2200x_{33} + 1100x_{34} + 1300x_{41}$$
$$+ 600x_{42} + 2300x_{43} + 400x_{44}$$

S.t:

① محدودیت کارمند $\quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$

② محدودیت کارمند $\quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$

③ محدودیت کارمند $\quad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$

④ محدودیت کارمند $\quad x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$

① محدودیت شغل $\quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$

② محدودیت شغل $\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$

③ محدودیت شغل $\quad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$

④ محدودیت شغل $\quad x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$

تخصیص داده شده (۱) به شغل است.

یا کارمند به شغل تخصیص داده می‌شود یا نمی‌شود. عدد یک به معنی تخصیص داده شدن و عدد صفر به معنی

$$x_{11} \in \{0,1\},\ x_{12} \in \{0,1\},\ \dots,\ x_{44} \in \{0,1\}$$

مسئله برنامه ریزی خطی دارای دو فرم است:

۱- فرم استاندارد (برای جدول سیمپلکس) ۲- فرم کانونی (برای نوشتن دوگان)

۱- فرم استاندارد (مشترک برای ماکزیمم و مینیمم)

$$\begin{array}{c}\text{Min}\\ \text{یا}\\ \text{Max}\end{array} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (b_1 \geq 0)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (b_2 \geq 0)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (b_m \geq 0)$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , \ldots , x_n \geq 0$$

فرم ماتریسی:

$$\begin{array}{c}\text{Min}\\ \text{یا}\\ \text{Max}\end{array} \quad Z = CX$$

$$\text{s.t.} \quad AX = b \quad (b \geq 0)$$

$$x \geq 0$$

۱- فرم کانونی

مسئله ماکزیمم:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$$

فرم ماتریسی:

$$\text{Max } Z = CX$$

s.t.

$$AX \leqslant b$$

$$X \geqslant 0$$

فرم کانونی مسئله مینیمم

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n \geqslant b_m$$

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$$

فرم ماتریسی:

$$\text{Min } Z = CX$$

s.t.

$$AX \geqslant b$$

$$X \geqslant 0$$

نکته: از معادله زیر برای تبدیل حالات مختلف برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شود.

۱) برای تبدیل محدودیت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b$ به محدودیت تساوی از متغیر کمکی استفاده می‌شود.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b \xrightarrow{+S} a_1x_1+\dots+a_nx_n+S=b$$

مثال) $2x_1+x_2 \leq 5 \Rightarrow 2x_1+x_2+S=5$

۲) برای تبدیل محدودیت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \geq b$ به محدودیت تساوی از متغیر کمکی استفاده می‌کنیم.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n \geq b \xrightarrow{-S} a_1x_1+\dots+a_nx_n-S=b$$

مثال) $2x_1+x_2 \geq 5 \Rightarrow 2x_1+x_2-S=5$

۳) برای تبدیل محدودیت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b$ به محدودیت بزرگتر مساوی، طرفین را در -1 ضرب می‌کنیم.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b \xrightarrow{\times -1} -a_1x_1-\dots-a_nx_n \geq -b$$

مثال) $2x_1+x_2 \leq 5 \xrightarrow{\times -1} -2x_1-x_2 \geq -5$

۴) برای تبدیل محدودیت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \geq b$ به محدودیت کوچکتر مساوی، طرفین را در ۱- ضرب می‌کنیم.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n \geq b \xrightarrow{\times -1} -a_1x_1-\dots-a_nx_n \leq -b$$

مثال) $2x_1+x_2 \geq 5 \xrightarrow{\times -1} -2x_1-x_2 \leq -5$

۵) برای تبدیل محدودیت $a_1x_1+\dots+a_nx_n = b$ به محدودیت بزرگتر مساوی به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n = b \equiv \begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b & -1 \\ a_1x_1+\dots+a_nx_n \geq b & \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1x_1-\dots-a_nx_n \geq -b \\ a_1x_1+\dots+a_nx_n \geq b \end{cases}$$

مثال) $2x_1+x_2 = 5 \equiv \begin{cases} 2x_1+x_2 \leq 5 & -1 \\ 2x_1+x_2 \geq 5 & \checkmark \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1-x_2 \geq -5 \\ 2x_1+x_2 \geq 5 \end{cases}$

۶) برای تبدیل محدودیت $a_1x_1+\dots+a_nx_n = b$ به محدودیت کوچکتر مساوی بصورت زیر عمل می‌کنیم.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n = b \equiv \begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b \ \checkmark \\ a_1x_1+ a_nx_n \geq b \quad (-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b \\ -a_1x_1-\dots-a_nx_n \leq -b \end{cases}$$

مثال)

$$2x_1+x_2=5 \equiv \begin{cases} 2x_1+x_2 \leq 5 \ \checkmark \\ 2x_1+x_2 \geq 5 \quad (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2 \leq 5 \\ -2x_1-x_2 \leq -5 \end{cases}$$

۷) اگر مقدار سمت راست محدودیت، عددی منفی باشد، برای تبدیل آن به مثبت، طرفین را در ۱- ضرب می‌کنیم.

مثال)

$$2x_1+x_2=-5 \xrightarrow{\times -1} -2x_1-x_2=5$$

۸) برای تبدیل متغیر $x \leq 0$ به متغیر بزرگتر مساوی از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=-y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

و در مسئله هر کجا x دیدیم بجایش $-y$ جایگذاری می‌کنیم و x را از بین متغیرها

$$\begin{cases} x = x' - x'' \\ x' \geq 0 , \; x'' \geq 0 \end{cases}$$

⑨ برای تبدیل متغیر آزاد در علامت (نامقید) x، به متغیر بزرگتر مساوی از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. و هرکجا در مسئله x دیدیم بجایش "$x' - x''$" اضافه می‌کنیم. و در آخر بین متغیرها $x' \geq 0$ و $x'' \geq 0$ را اضافه می‌کنیم.

⑩ برای تبدیل تابع هدف ماکزیمم به مینیمم و برعکس از تساوی زیر استفاده می‌کنیم.

$$Max(Z) \equiv -min(-Z) \qquad Min(Z) \equiv -Max(-Z)$$

(1)

الف) فرم استاندارد و فرم کانونی مسئله زیر را بنویسید.

فرم استاندارد

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Min} Z = CX \\ s.t. \\ AX = b \ (b \geq 0) \\ X \geq 0 \end{array}}$$

$\operatorname{Min} Z = 2x_1 + x_2$

s.t.

$x_1 + x_2 = -5 \xRightarrow{\times -1} -x_1 - x_2 = 5$

$-3x_1 + 5x_2 \geq -2 \xRightarrow{-S} -3x_1 + 5x_2 - S_1 = -2 \xRightarrow{\times -1} 3x_1 - 5x_2 + S_1 = 2$

$x_1 \leq 0 \ , \ x_2 \geq 0$

(2)

$\operatorname{Min} Z = 2x_1 + x_2$

s.t.

$-x_1 - x_2 = 5$

$3x_1 - 5x_2 + S_1 = 2$

$x_1 \leq 0 \ , \ x_2 \geq 0$

$x_1 \leq 0 \begin{cases} x_1 = -y \\ y \geq 0 \end{cases}$

استاندارد

$\operatorname{Min} Z = 2(-y) + x_2$

s.t.

$-(-y) - x_2 = 5$

$3(-y) - 5x_2 + S_1 = 2$

$y \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ S_1 \geq 0$

نوشتن فرم کانونی مسئله

فرم کانونی

$$\begin{aligned} \min\ & Z = CX \\ \text{s.t.}\ & AX \ge b \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

(1)

$\min Z = 2x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 = -5 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \ge -5 \ \checkmark \\ -1 \,|\, x_1 + x_2 \le -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \ge -5 \\ -x_1 - x_2 \ge 5 \end{cases}$$

$-3x_1 + 5x_2 \ge -2$

$x_1 \le 0 \ , \ x_2 \ge 0$

(2)

$$\begin{aligned} \min\ & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \ge -5 \\ & -x_1 - x_2 \ge 5 \\ & -3x_1 + 5x_2 \ge -2 \\ & x_1 \le 0 \ , \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \le 0 \quad \begin{cases} x_1 = -y \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min\ & Z = 2(-y) + x_2 \\ \text{s.t.}\ & -y + x_2 \ge -5 \\ & -(-y) - x_2 \ge 5 \\ & -3(-y) + 5x_2 \ge -2 \\ & y \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(1)

تمرین) فرم کانونی و استاندارد مسئله زیر را بنویسید.

$$\operatorname{Max} Z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

s.t.

① $x_1 + 5x_2 \leq -10$

② $2x_1 + x_3 = 5$

③ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$

$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \leq 0$

آزاد در علامت

فرم استاندارد

$$\operatorname{Max} Z = CX$$

s.t.

$$AX = b \; (b \geq 0)$$

$$x \geq 0$$

(2)

① $\xrightarrow{+S} x_1 + 5x_2 + S_1 = -10 \xrightarrow{\times -1} -x_1 - 5x_2 - S_1 = 10$

③ $\xrightarrow{-S} x_1 + x_2 + x_3 - S_2 = 12$

$$\operatorname{Max} Z = -20x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

s.t.

$$-x_1 - 5x_2 - S_1 = 10$$

$$2x_1 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - S_2 = 12$$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \leq 0$$

$$x_2 = \begin{cases} x_2' - x_2'' \\ x_2' \geq 0 \;,\; x_2'' \geq 0 \end{cases} \qquad x_3 = \begin{cases} x_3 = -y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(3)

$$\operatorname{Max} Z = -20x_1 + 30(x_2' - x_2'') + 40(-y)$$

$$-x_1 - 5(x_2' - x_2'') - S_1 = 10$$

$$2x_1 + (-y) = 5$$

$$x_1 + (x_2' - x_2'') + (-y) - S_2 = 12$$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2' \geq 0 \;,\; x_2'' \geq 0 \;,\; y \geq 0 \;,\; S_1 \geq 0 \;,\; S_2 \geq 0$$

فرم استاندارد

فرم کانونی

$$\text{Max } Z = CX$$
s.t.
$$AX \leq b$$
$$x \geq 0$$

(1)

$$\text{Max } Z = -20x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

① $x_1 + 5x_2 \leq -10$

② $2x_1 + x_3 = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 \leq 5 \ \checkmark \\ -1 \quad 2x_1 + x_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 \leq 5 \\ -2x_1 - x_3 \leq -5 \end{cases}$

③ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \xrightarrow{\times -1} -x_1 - x_2 - x_3 \leq -12$

---

(2)

$$\text{Max } Z = -20x_1 + 30x_2 + 40x_3$$
s.t.
$$x_1 + 5x_2 \leq -10$$
$$2x_1 + x_3 \leq 5$$
$$-2x_1 - x_3 \leq -5$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -12$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \quad , \quad x_3 \leq 0$$

$$x_2 = \begin{cases} x_2 = x_2' - x_2'' \\ x_2' \geq 0 \ , \ x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} x_3 = -y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(3)

$$\text{Max } Z = -20x_1 + 30(x_2' - x_2'') + 40(-y)$$
s.t.: $x_1 + 5(x_2' - x_2'') \leq -10$
$$2x_1 + (-y) \leq 5$$
$$-2x_1 - (-y) \leq -5$$
$$-x_1 - (x_2' - x_2'') - (-y) \leq -12$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2' \geq 0 \quad , \quad x_2'' \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

فرم کانونی و استاندارد مسئله را بنویسید

۲) $\operatorname{Max} z = -\frac{1}{2}x_2 + 5x_3$

s.t.

$$\frac{3}{2}x_1 - 4x_2 = -10$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_3 + x_1 \geq 20$$

$$x_1 \leq 0 \ , \quad x_2 \geq 0 \ , \quad x_3$$

(فرم استاندارد)

$\operatorname{Max} Z = CX$

s.t.

$$AX = b \quad (b \geq 0)$$

$$X \geq 0$$

(1)

$$\frac{3}{2}x_1 - 4x_2 = -10 \xrightarrow{\times -1} -\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 = 10$$

$$x_2 + x_3 \leq 1 \xrightarrow{+S} x_2 + x_3 + S_1 = 1$$

$$x_3 + x_1 \geq 20 \xrightarrow{-S} x_3 + x_1 - S_2 = 20$$

$\operatorname{Max} Z = -\frac{1}{2}x_2 + 5x_3$

s.t.

$$-\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 = 10$$

$$x_2 + x_3 + S_1 = 1$$

$$x_3 + x_1 - S_2 = 20$$

$$x_1 = \begin{cases} x_1 = -y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} x_3 = x_3' - x_3'' \\ x_3' \geq 0 \ , \quad x_3'' \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0 \ , \quad x_2 \geq 0 \ , \quad x_3$$

(2)

$\operatorname{Max} Z = -\frac{1}{2}x_2 + 5(x_3' - x_3'')$

$$-\frac{3}{2}(-y) + 4x_2 = 10$$

$$x_2 + (x_3' - x_3'') + S_1 = 1$$

$$(x_3' - x_3'') + (-y) - S_2 = 20$$

$$y \geq 0 \ , \quad x_3' \geq 0 \ , \quad x_3'' \geq 0$$

$$S_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \geq 0 \ , \quad S_2 \geq 0$$

تمرین فرم استاندارد و فرم کانونی مسئله را بنویسید:

1) $\text{Min}\ Z = -10x_1 + x_2 + 4x_3 + 50x_4$

s.t.

$$x_1 \geq -10$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$x_2 + x_3 \leq 12$$

$$x_1 \quad , \quad x_2 \leq 0 \quad , \quad x_3 \leq 0 \quad , \quad x_4 \geq 0$$

برخی اصطلاحات برنامه ریزی خطی

۱) **جواب:** هر مجموعه مقادیری که به متغیرهای تصمیم اختصاص یابد، صرف نظر از اینکه در محدودیت ها صدق کنند یا نه، یک مجموعه جواب برنامه ریزی خطی است.

۲) **جواب موجه یا شدنی:** جوابی است که در تمام محدودیت ها صدق می کند.

۳) **ناحیه موجه یا ناحیه شدنی:** مجموعه ی کلیه ی جواب های موجه تشکیل ناحیه ای می دهند و با S نشان می دهند.

۵) **جواب بهینه:** جواب موجهی است که به ازای آن، مطلوب ترین مقدار تابع هدف به دست آید.

۶) **معادله معرف:** اگر یک محدودیت را صرف نظر از علامتش به صورت تساوی در نظر بگیریم، معادله ای به دست می آید که به نام معادله معرف آن محدودیت.

۷) **نقاط گوشه ای یا راسی:** به محل تلاقی لااقل n معادله معرف، نقاط گوشه ای می گویند که n تعداد متغیرهای تصمیم می باشد.

۸) **نقاط گوشه ای تبهگن (تباهیده):** نقاط گوشه ای که محل تلاقی بیش از n معادله معرف باشد.

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 240 \quad (A)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 400 \quad (B)$$

$$x_1 \ge 0 \;(C),\quad x_2 \ge 0 \;(D),\quad x_3 \ge 0 \;(E)$$

۱) نقاط $(1,2,3)$ و $(-1,0,3)$ و $(100,200,300)$ و $(10,10,20)$ چهار جواب مسئله بالا می باشند.

۲) نقطه $(-1,0,3)$ غیرموجه است چون در محدودیت علامت $x_1 \ge 0$ صدق نمی کند.

۳) نقطه $(100,200,300)$ غیرموجه است چون در محدودیت های A و B صدق نمی کند.

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 240 \Rightarrow 500 + 400 + 1200 = 2100 \nleq 240 \Rightarrow \text{صدق نکرد}$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 400 \Rightarrow 400 + 1200 + 900 = 2500 \nleq 400 \Rightarrow \text{صدق نکرد}$$

۴) نقاط $(1,2,3)$ و $(10,10,20)$ شدنی هستند چون در تمام محدودیت های A و B و C و D و E صدق می کنند.

اگر مقدار تابع هدف را در هر یک حساب کنیم خواهیم داشت

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$(1,2,3) \Rightarrow Z = 3(1) + 5(2) + 2(3) = 19$$

$$(10,10,20) \Rightarrow Z = 3(10) + 5(10) + 2(20) = 30 + 50 + 40 = 120$$

چون مسئله ماکزیمم سازی است پس $(10,10,20)$ بهتر از $(1,2,3)$ است.

جوابی که بین تمام جواب های شدنی بهتر باشد جواب بهینه است

۳.۳ روش ترسیمی حل مسأله برنامه‌ریزی خطی

در فرآیند تحقیق در عملیات اشاره شد که پس از ساختن مدل، به مرحله حل آن می‌رسیم. در واقع یک مدل ریاضی به خودی خود ارزش کاربردی و تحلیلی ندارد. اهمیت و ارزش مدل به نتایج آن است که پس از حل حاصل می‌شوند. گفته شد که در مدل برنامه‌ریزی خطی روابط از نوع خطی هستند. روابط خطی یکی از ساده‌ترین روابطی هستند که برای حل آنها می‌توان از شیوهٔ «ترسیمی» استفاده کرد. روش ترسیمی در مدلهای برنامه‌ریزی خطی به مدلهایی محدود می‌شود که حداکثر دارای دو متغیر تصمیم هستند. برای حل این نوع مدلها می‌توان از یک دستگاه مختصات استفاده کرد. استفاده از شیوهٔ ترسیمی برای مدلهایی که سه متغیره هستند نیز با استفاده از دستگاههای سه بعدی تا حدودی امکان‌پذیر است ولی چنانچه تعداد متغیرهای تصمیم بیش از ۳ باشد، حل مدل به شیوه ترسیمی به هیچ وجه امکانپذیر نخواهد بود. اگرچه شیوه ترسیمی حل مدل صرفاً جنبهٔ تئوریک دارد، ولی در این فصل به طور مفصل مورد بحث قرار می‌گیرد. چون شیوه ترسیمی، روش بسیار ساده‌ای برای درک مفاهیم پیچیدهٔ LP و مفاهیم بعدی کتاب خواهد بود حال روش ترسیمی را با استفاده از مسأله ترکیب تولید تشریح می‌کنیم.

مثال ۳.۱ کارخانه‌ای درصدد تولید دو نوع محصول است که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع (نیروی کار و مواد اولیه) به صورت زیر است. سود حاصل از تولید هر واحد از محصولات نیز داده شده است.

محصول	منابع مورد نیاز		سود (ریال)
	نیروی کار (نفر - ساعت)	مواد اولیه kg	
۱	۱	۴	۴۰
۲	۲	۳	۵۰

متغیرهای تصمیم مدل عبارتند از:

x_1 = تعداد تولید از محصول نوع ۱

x_2 = تعداد تولید از محصول نوع ۲

تابع هدف عبارت است از: حداکثر کردن سود ناشی از تولید:

$$\text{Max } Z = 40 x_1 + 50 x_2$$

محدودیتهای مدل به ترتیب شامل محدودیت نیروی کار و محدودیت مواد اولیه خواهد بود.

$x_1 + 2x_2 \leq 40$ محدودیت نیروی کار (نفر ـ ساعت)

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$ (kg) محدودیت مواد اولیه

علاوه بر محدودیتهای کارکردی فوق، باید محدودیتهای غیرمنفی را برای متغیرهای تصمیم به مدل اضافه کرد. حال کلیّت مدل ترکیب تولید به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Max } Z = 40 x_1 + 50 x_2$$

s.t:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

برای حل مدل فوق با استفاده از روش ترسیمی، ابتداء یک دستگاه مختصات تشکیل می‌دهیم که محور افقی آن x_1 و محور عمودی آن با x_2 مدّرج می‌شود. سپس به رسم هریک از محدودیتها در دستگاه مختصات می‌پردازیم. این عمل با در نظر گرفتن هر یک از محدودیتها به صورت یک معادله (خط مستقیم) امکان‌پذیر است. حالا به رسم محدودیت نیروی کار توجه کنید:

ابتداء آن را به صورت خط $x_1 + 2x_2 = 40$ تعریف می‌کنیم.

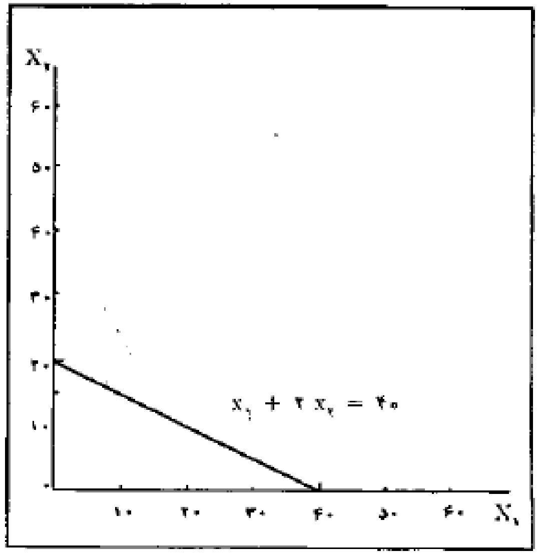
ساده‌ترین روش برای رسم یک خط تعیین دو نقطه بر روی محورها و سپس متصل کردن آن نقاط با استفاده از یک خط مستقیم است. نقطهٔ اوّل می‌تواند با استفاده از $x_1 = 0$ و سپس حل معادله برحسب x_2 معلوم می‌شود. یعنی:

$$(0) + 2x_2 = 40$$
$$x_2 = 20$$

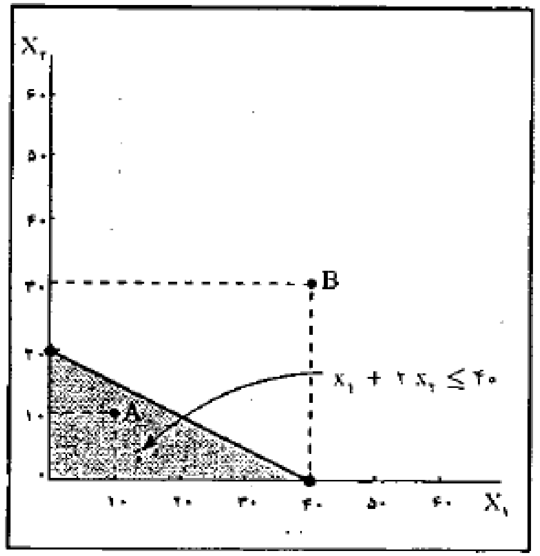
نقطهٔ دوّم نیز با $x_2 = 0$ و حل معادله برحسب x_1 بدست می‌آید، به صورت زیر:

$$x_1 + 2(0) = 40$$
$$x_1 = 40$$

واضح است که نقطهٔ ($x_1 = 0$ و $x_2 = 20$) بر روی محور عمودی و نقطهٔ ($x_1 = 40$ و $x_2 = 0$) بر روی محور افقی قرار دارد. حال با استفاده از یک خط مستقیم این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم، همچنانکه در شکل ۳.۱ نشان داده شده است. توجه دارید که برای سادگی در ترسیم نامعادله به معادله تبدیل شده است. پس «خط» بدست آمده در نمودار بیانگر تمامیت محدودیت نیروی کار نیست. زیرا محدودیت شامل کلیهٔ نقاط کوچکتر یا مساوی (≤) ۴۰ است نه مقادیر مساوی (=) ۴۰. ناحیهٔ مربوط به محدودیت نیروی کار در شکل ۳.۲ به صورت هاشور خورده نشان داده شده است.



شکل ۳.۱ ترسیم خط محدودیت نیروی کار



شکل ۳.۲ ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار

حال آزمون صحت ترسیم ناحیه مربوط به محدودیت اوّل مدل با استفاده از بررسی دو نقطه انجام می‌گیرد. نقطهٔ A را در شکل ۳.۲ در نظر بگیرید. این نقطه در تقاطع ($x_1 = 10$ و $x_2 = 10$) قرار دارد. مقدار نقطهٔ A را در محدودیت مربوط جایگذاری کنید:

$$x_1 + 2x_2 \le 40 \rightarrow 10 + 2(10) \le 40$$
$$30 \le 40 \text{ ساعت}$$

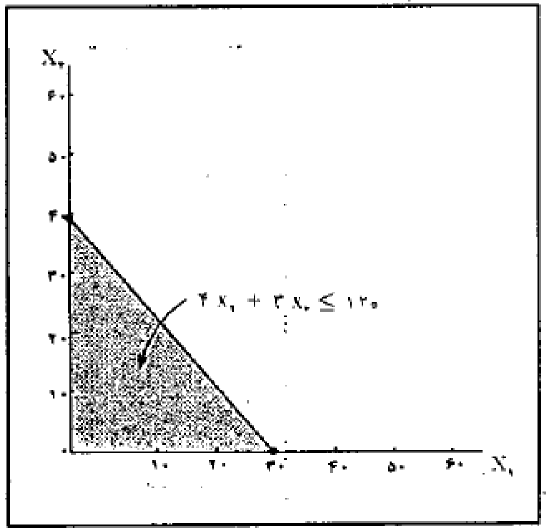
مشخص می‌گردد که نقطهٔ A واقعاً جزئی از ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار است. بنابراین از نظر ریاضی در محدودیت مربوط صدق می‌کند. حال به بررسی نقطهٔ B بپردازید. نقطهٔ B دارای مختصات ($x_1 = 40$ و $x_2 = 30$) است.

۴۰ + ۲(۳۰) ≤ ۴۰

۱۰۰ ≤ ۴۰ ساعت

براساس شکل ۳.۲، نقطهٔ B خارج از ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار قرار دارد. بنابراین از نظر ریاضی نباید در محدودیت مربوط صدق کند. همچنانکه بررسی ریاضی نشان می‌دهد مقدار ۱۰۰ کوچکتر یا مساوی ۴۰ نیست.

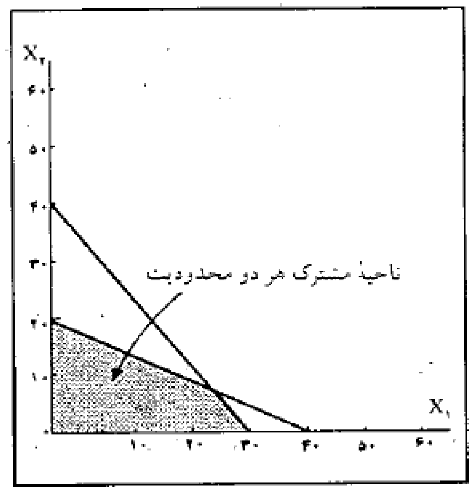
به طریق مشابه محدودیت مواد اولیه مسأله ترسیم می‌شود. همچنانکه در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. خط مربوط به معادله دوّم مدل حد فاصل بین نقاط ($x_1 = ۰$ و $x_2 = ۴۰$) و ($x_1 = ۳۰$ و $x_2 = ۰$) می‌باشد و ناحیهٔ مربوط به نامعادله دوّم مدل به صورت هاشور خورده



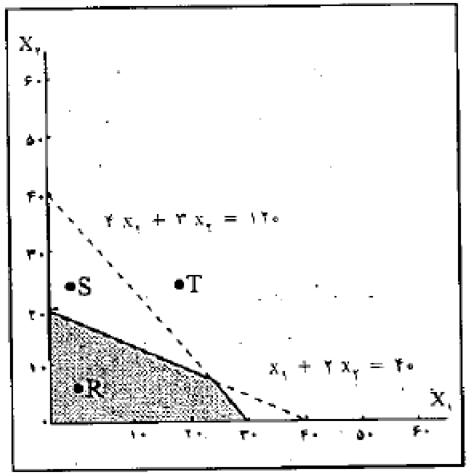
شکل ۳.۳ ناحیه مربوط به محدودیت مواد اولیه

در منطقه کوچکتر یا مساوی (≤) خط قرار گرفته است.

ترکیب دو شکل ۳.۲ و ۳.۳ منجر به نمایش هندسی محدودیتهای مدل به طور همزمان خواهد شد که در شکل ۳.۴ آمده است. ناحیه هاشور خورده در شکل ۳.۴ شامل مجموعه نقاطی است که در هر دو محدودیت صدق خواهد کرد. به عنوان مثال نقاط R، S و T را در شکل ۳.۵ در نظر بگیرید. نقطهٔ R هر دو محدودیت مدل را ارضاء می‌کند. بنابراین این نقطه یک



شکل ۳.۴ نمایش همزمان دو محدودیت



شکل ۳.۵ ناحیه موجه محدودیتها

«جواب موجه»[1] می‌باشد. نقطه S محدودیت اوّل را ($x_1 + ۲x_2 \le ۴۰$) نقض می‌کند ولی در محدودیت دوّم ($۴x_1 + ۳x_2 \le ۱۲۰$) صدق می‌کند. بنابراین آن را یک «جواب غیرموجه»[2] می‌گویند. نقطه T نیز به طریق مشابه یک نقطهٔ غیرموجه است، چون در هیچ یک از محدودیتهای مدل صدق نمی‌کند.

ناحیهٔ هاشور خوردهٔ شکل ۳.۵، «ناحیه موجه»[3] نامیده می‌شود. زیرا تمامی نقاط این ناحیه، محدودیتهای مدل را ارضاء می‌کنند و در آنها صدق می‌نمایند. بنابراین یکی از نقاط این ناحیه منجر به حداکثر سود شرکت تولیدی در مسأله ۳.۱ خواهد شد. قدم بعدی در روش ترسیمی حل مدل، یافتن «نقطهٔ بهینه» است. نقطهٔ بهینهٔ این مسأله، نقطه‌ای است که سود به‌ازای آن در ناحیهٔ موجه حداکثر می‌شود.

۳.۳.۱ نقطه (جواب) بهینه[1]

قدم دوم در روش ترسیمی حل مدل های برنامه ریزی خطی تعیین نقطه ای موجه است که بهترین مقدار تابع هدف به ازاء آن حاصل می شود. برای به دست آوردن این نقطه ابتدا بردار c متشکل از ضریب متغیرها در تابع هدف را رسم می کنیم

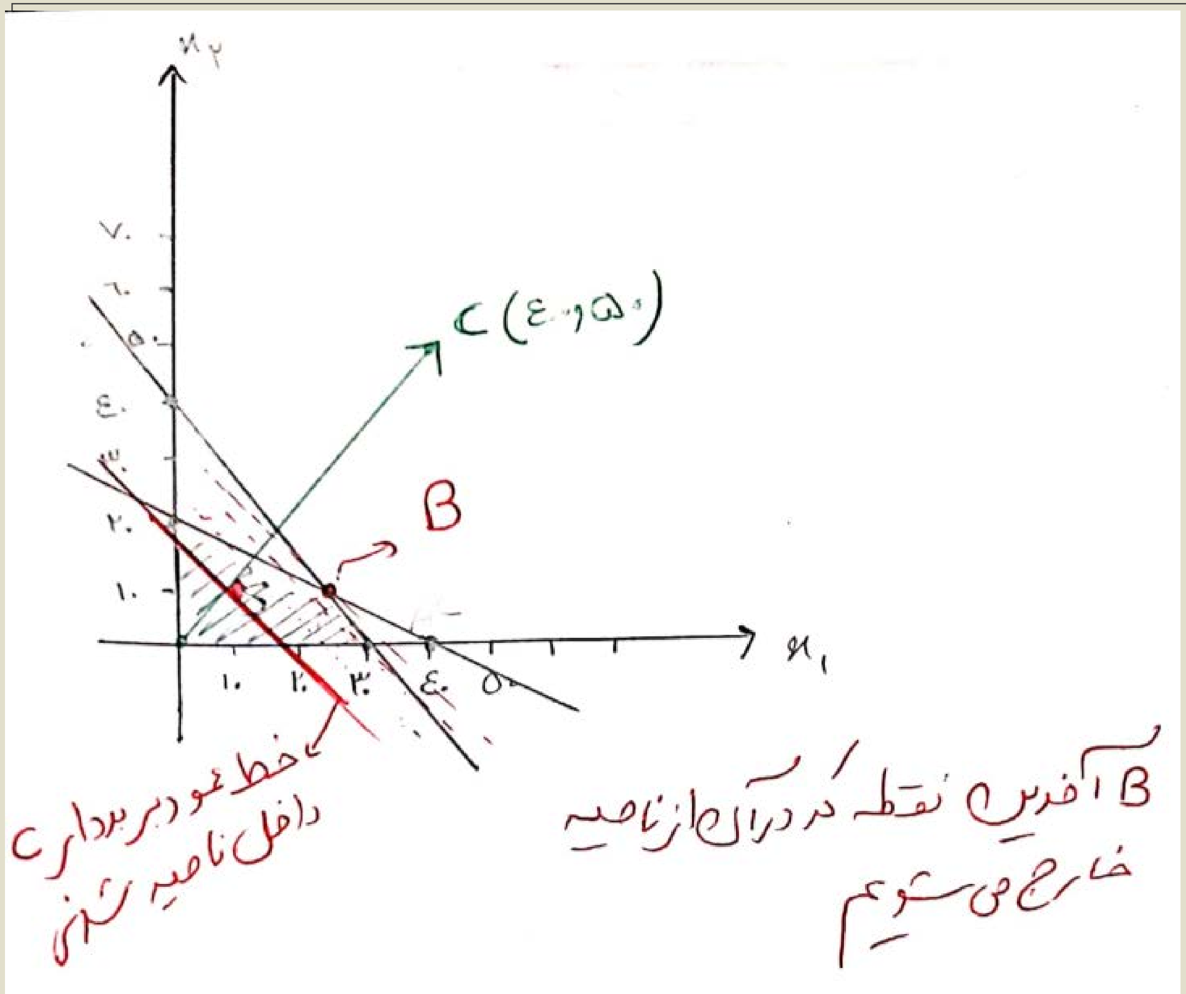
$z=4x_1+4x_2 \Rightarrow c=(4,4)$

سپس خط عمود بر بردار c داخل ناحیه شدنی رسم می کنیم اگر مسئله ماکزیمم بود این خط عمود بر c را به موازات خود در جهت c حرکت می دهیم آخرین نقطه ای که از آن خارج می شویم جواب بهینه خواهد بود

اگر مسئله مینیمم باشد این خط عمود بر c را به موازات خود در جهت عکس c حرکت می دهیم آخرین نقطه ای که از آن خارج می شویم جواب بهینه خواهد بود.

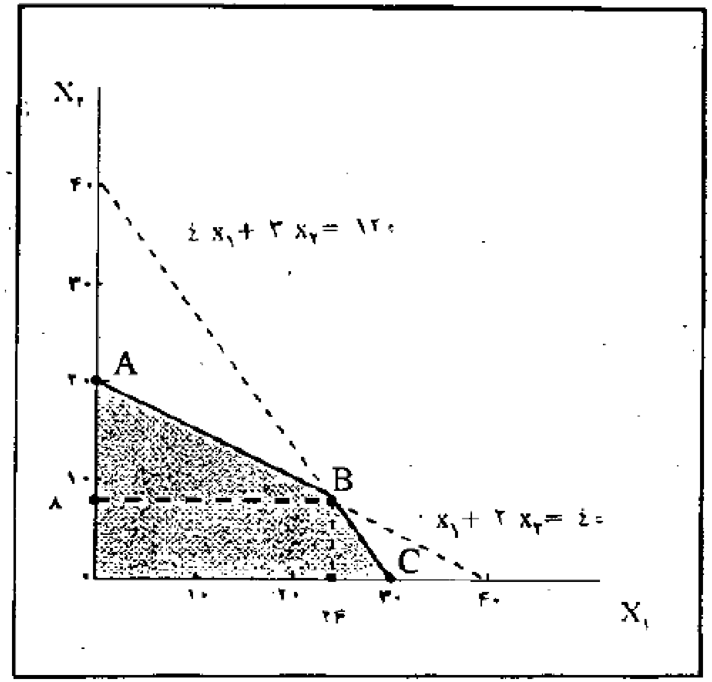
اگر ناحیه شدنی کران دار باشد برای پیدا کردن جواب بهینه می توان تمام نقاط گوشه ای ناحیه شدنی (S) را پیدا کرد سپس مقدار آن ها را در تابع هدف پیدا نمود

نقطه گوشه ای که به ازاء آن بیشترین مقدار برای z به دست آید جواب بهینه مسئله max و نقطه گوشه ای که به ازاء آن کمترین مقدار برای z به دست آید جواب بهینه مسئله min خواهد بود.



۳.۳.۲ تعیین مقادیر متغیرهای تصمیم

سومین مرحله در رویکرد ترسیمی حل مدل LP بدست آوردن مقادیر x_1 و x_2 در نقطهٔ بهینه است. در مثال ما، همچنانکه از شکل ۳.۹ برمی‌آید، می‌توان به طریق ترسیمی دریافت که نقطهٔ B در تقاطع ($x_1 = ۲۴$ و $x_2 = ۸$) قرار دارد. این نحوهٔ استخراج مقادیر متغیرهای تصمیم در



شکل ۳.۹ تعیین مقادیر جواب به روش هندسی

صورتی امکان دارد که ترسیم هندسی محدودیتها با دقت زیادی انجام گرفته باشد. چنانچه در ترسیم نمودار دقت لازم به عمل نیآید، ناچاریم مقادیر متغیرهای تصمیم را به طور تقریبی استخراج کنیم. حال برای تعیین مقادیر جواب به رویه‌ای اشاره خواهد شد که به عنوان یک قاعدهٔ کلی قابل استفاده در کلیهٔ موارد ترسیمی است. برای ارائه این قاعده ابتداء ناچاریم چند خاصیت نقطهٔ جواب را بیان کنیم.

در شکل ۳.۸، همچنانکه تابع هدف افزایش می‌یابد، به نقطه‌ای می‌رسیم که آخرین نقطهٔ ناحیه موجه است. این نقطه در «مرز» ناحیه موجه قرار دارد. پس «نقطهٔ بهینه همواره در مرز ناحیه موجه قرار دارد.» چون نقاط مرزی شامل دورترین نقاط نسبت به مبدأ مختصات هستند. این ویژگی مسائل برنامه‌ریزی خطی باعث می‌شود که تعداد نقاط کاندید برای جواب بهینه به شدت کاهش یابد. با این وجود باز می‌توان تعداد نقاط کاندید برای جواب بهینه را با استفاده از خاصیت دیگر برنامه‌ریزی خطی کاهش داد.

جواب بهینه علاوه بر قرار گرفتن در مرز ناحیه موجه، «همواره بر روی یک گوشه» از مرز قرار دارد. گوشه؛ شامل نقطه‌ای است که در تقاطع «حداقل دو خط» از خطوط مرزی قرار می‌گیرد. خطوط مرزی مثال ما شامل خطوط مربوط به محدودیتهای نیروی کار ($x_1 + ۲x_2 \le ۴۰$) و مواد اولیه ($۴x_1 + ۳x_2 \le ۱۲۰$) و همچنین خطوط (محورهای) مربوط به $x_1 \ge ۰$ و $x_2 \ge ۰$ می‌باشد. گوشه‌های بدست آمده (نقاط A، B و C) در شکل ۳.۹ «نقاط حدی»[1] هستند. علّت نامگذاری آنها این است که براساس این نقاط «حد» ناحیه موجه مشخص می‌شود. می‌توان به طریق ریاضی ثابت کرد که در برنامه‌ریزی خطی «جواب بهینه همواره در نقطهٔ حدی» قرار دارد. بنابراین در مثال ما جواب بهینه به یکی از نقاط A، B و C محدود می‌شود. نقطهٔ حدی بهینه، آخرین نقطه‌ای است که خط تابع هدف در ناحیه موجه بر آن مماس می‌شود. این خاصیت در شکل ۳.۸ نشان داده شده است.

از شکل ۳.۹ درمی‌یابیم که جواب بهینه گوشهٔ B است. از آنجا که نقطه B از تقاطع دو خط مرزی $x_1 + ۲x_2 = ۴۰$ و $۴x_1 + ۳x_2 = ۱۲۰$ بوجود آمده است، پس می‌توان با حل همزمان این دو معادله، مقادیر x_1 و x_2 را بدست آورد.

$$\text{دستگاه معادلات}\begin{cases} x_1 + ۲x_2 = ۴۰ & \text{معادله ۱} \\ ۴x_1 + ۳x_2 = ۱۲۰ & \text{معادله ۲} \end{cases}$$

طرفین معادله (۱) را در ۴ ـ ضرب کرده و مجدداً دستگاه معادلات را بنویسید:

$$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases}$$

حال با حذف x_1 از دستگاه معادلات داریم:

$$-5x_2 = -40$$
$$x_2 = 8$$

بنابراین با مشخص شدن مقدار x_2 می‌توانیم، به کمک یکی از معادلات اصلی مقدار x_1 را نیز تعیین کرد. پس به کمک معادله (۱) داریم:

$$x_1 + 2(8) = 40$$
$$x_1 = 24$$

حال مقدار تابع هدف؛ Z، را به ازاء گوشه ($x_1 = 24$ و $x_2 = 8$) تعیین می‌کنیم:

$$Z = 40x_1 + 50x_2$$
$$Z = 40(24) + 50(8)$$
$$Z = 1360 \text{ ریال}$$

بنابراین با استفاده از رویهٔ فوق مشخصات هر یک از گوشه‌های موجه را بدست آورده و در جدول ۳.۱ خلاصه کرده‌ایم.

جدول ۳.۱ مشخصات نقاط حدی (گوشه‌های موجه)

نام گوشه	مختصات (x_1 و x_2)	مقدار تابع هدف (z)
A	($x_1 = 0, x_2 = 20$)	$Z = 1000$
B	($x_1 = 24, x_2 = 8$)	$Z^* = 1360$
C	($x_1 = 30, x_2 = 0$)	$Z = 1200$

پرواضح است که گوشهٔ B بهترین گوشه است. چون نسبت به سایر نقاط حدی (A و C) دارای سود بیشتری است و از آنجاکه براساس خاصیت مدلهای برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه همواره بر روی گوشه قرار دارد، پس این نقطه همان جواب بهینهٔ مدل ترکیب تولید در مثال ۳.۱ خواهد بود.

نکته: برای حل مسئله به روش ترسیمی ابتدا محدودیت‌ها را رسم می‌کنیم. سپس اشتراک آنها را بدست آورده و ناحیه شدنی (D) را تشکیل می‌دهیم. اگر ناحیه شدنی محدود (متناهی) باشد (کران دار)، در این صورت هم از روش نقاط گوشه‌ای و هم از روش بردار C می‌توانید استفاده کنید. اما اگر ناحیه شدنی نامحدود (نامتناهی) باشد (بی‌کران)، در این حالت فقط از روش بردار C می‌توان استفاده کرد.

روش بردار C: در این روش ابتدا ضریب متغیرها را در تابع هدف، در برداری به نام C قرار می‌دهیم. سپس بردار C را رسم می‌کنیم و بعد خطی عمود بر بردار C، داخل ناحیه شدنی رسم می‌کنیم. اگر مسئله ماکزیمم سازی باشد، خط عمود بر C را در جهت C به موازات خودش ادامه می‌دهیم. در آخرین نقطه‌ای که از ناحیه شدنی خارج می‌شویم، جواب بهینه خواهد بود.

اگر مسئله مینیمم سازی باشد، خط عمود بر C را در جهت عکس C به موازات خود ادامه می‌دهیم و آخرین نقطه‌ای که از ناحیه خارج می‌شویم، جواب بهینه خواهد بود.

روش نقاط گوشه ای:

۱- ناحیه شدنی را رسم می کنیم

۲. دستگاه معادلات مربوط به هر یک از گوشه‌های ناحیه موجه را حل کنید تا ارزش متغیرهای تصمیم در هر گوشه تعیین شود.

۳. مقادیر گوشه‌های موجه را در تابع هدف جای‌گذاری کنید تا مقدار Z به ازای آن گوشه مشخص شود. ضمن مقایسهٔ مقدار Z، گوشهٔ بهینه را معین کنید.

مثال)

$\begin{matrix} Min \\ Max \end{matrix} \; Z = -x_1 + x_2$

s.t.

$-x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 0 \;, \; x_2 \geq 0$

$-x_1 + 2x_2 \leq 3$

$-x_1 + 2x_2 = 3$

x_1	A: 0	B: -3
x_2	$\frac{3}{2}$	0

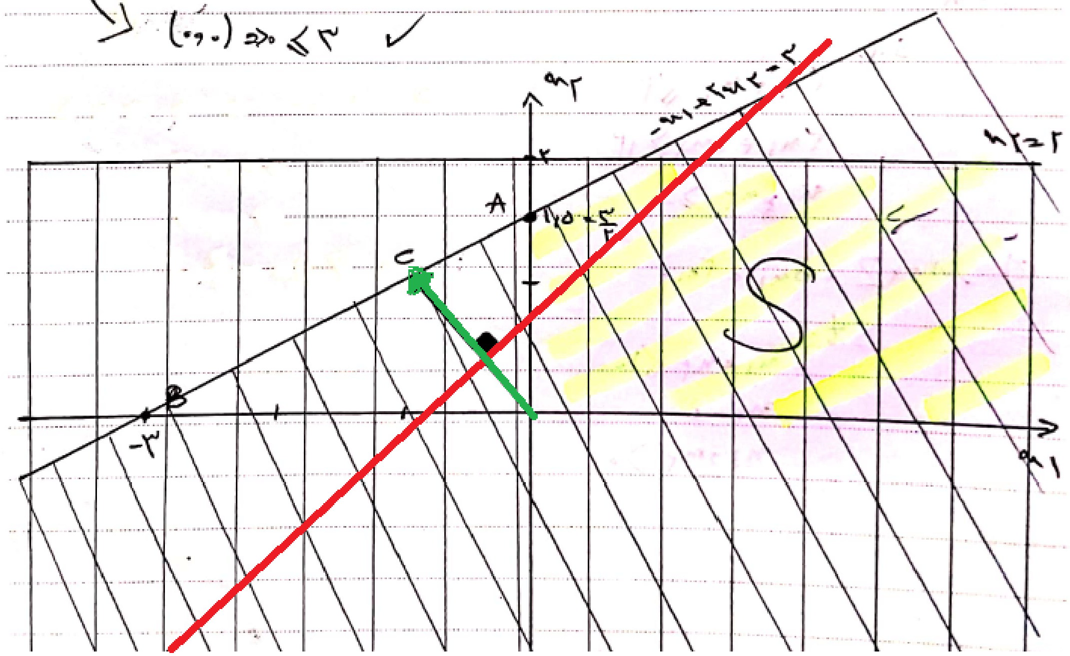
$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$ ✓

$x_2 \leq 2$

$x_2 = 2$

$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 2$ ✓

$C(-1, 1)$



$Z = -x_1 + x_2 \qquad A(0, \frac{3}{2}) \Rightarrow Z_A = \frac{3}{2}$

$A(0, \frac{3}{2})$ جواب بهینه مسئله Max می‌باشد و مقدار بهینه $Z = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ می‌باشد.

مسئله Min جواب بهینه نامتناهی دارد و مقدار بهینه $Z = -\infty$ است.

مسئله ماکزیمم جواب بهینه منحصر به فرد دارد جواب بهینه نقطه A و مقدار بهینه ۳/۲ می باشد.

مسئله مینیمم جواب بهینه نامتناهی دارد و مقدار بهینه منهای بینهایت می باشد

مثال)

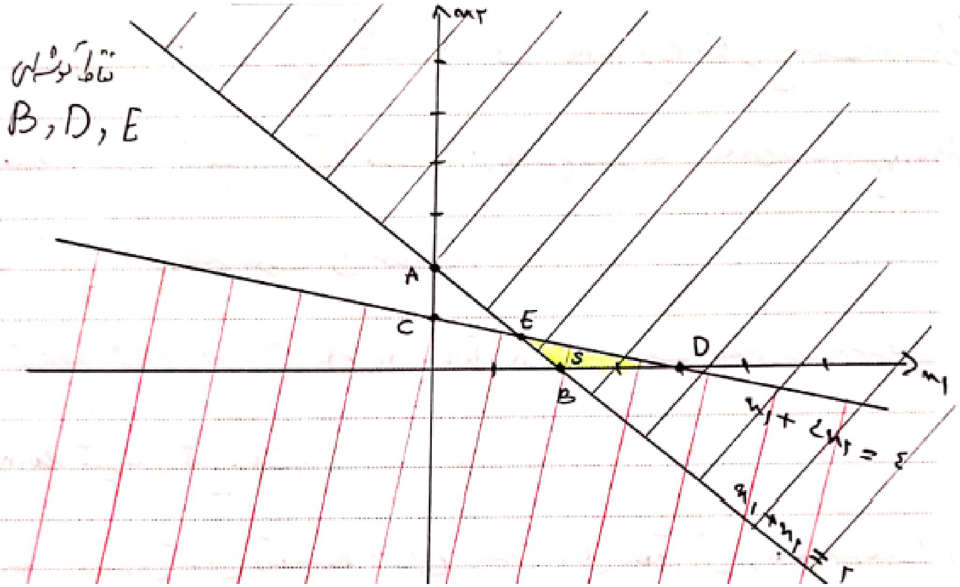
$$\begin{matrix} \text{Max} \\ \text{Min} \end{matrix} \; Z = x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$



$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

x_1	A: 0	B: 2
x_2	2	0

نقطه‌ی دلخواه که روی خط نباشد

$(0,0) \Rightarrow 0 \geq 2$ ✗ صدق نکند

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 = 4$$

x_1	C: 0	D: 4
x_2	1	0

$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 4$ ✓ صدق می‌کند

نقطه E

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 4 \\ -4 \quad x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \cancel{4x_2} = 4 \\ -4x_1 - \cancel{4x_2} = -8 \end{cases}$$

$$\boxed{-3x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}}$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$\frac{4}{3} + x_2 = 2$$

$$x_2 = \frac{2}{1} - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3} \qquad \boxed{x_2 = \frac{2}{3}}$$

$$Z = x_1 + 5x_2$$

$$B(2,0) \Rightarrow Z_B = 2 + 5(0) = 2$$

$$D(4,0) \Rightarrow Z_D = 4 + 5(0) = 4$$

$$E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow Z_E = \frac{4}{3} + 5\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3} \qquad \frac{14}{3} \simeq 4.66$$

جواب‌های بهینه مسئله max $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$ ، $E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ جواب بهینه مسئله ماکزیمم می‌باشد و مقدار بهینه $Z = \frac{14}{3}$ است.

جواب‌های بهینه مسئله min $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ، $B(2,0)$ جواب بهینه مسئله مینیمم می‌باشد و مقدار بهینه $Z = 2$ می‌باشد.

مسائل زیر را به روش ترسیمی حل کنید:

1) $\begin{matrix} Max \\ Min \end{matrix}\ Z = 3x_1 + 2x_2$

s.t.

$x_1 + x_2 \leq 1$

$2x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$

حل:

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 + x_2 = 1$

	A	B
x_1	0	1
x_2	1	0

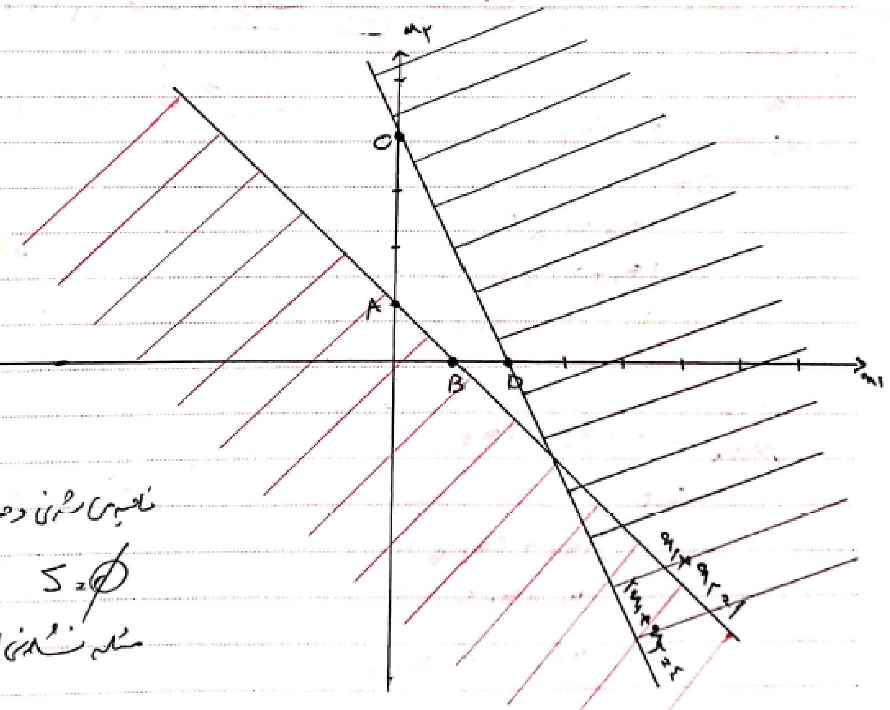
$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 1$ ✓

$2x_1 + x_2 \geq 4$

$2x_1 + x_2 = 4$

	C	D
x_1	0	2
x_2	4	0

$(0,0) \Rightarrow 0 \geq 4$ ✗



ناحیه شدنی وجود ندارد

$S = \emptyset$

مسئله نشدنی است

3) $\begin{matrix} Min \\ Max \end{matrix}\ Z = 3x_1 + 2x_2$

s.t.

$6x_1 + 4x_2 \leq 12$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$

$6x_1 + 4x_2 \leq 12$

$6x_1 + 4x_2 = 12$

	A	B
x_1	0	2
x_2	3	0

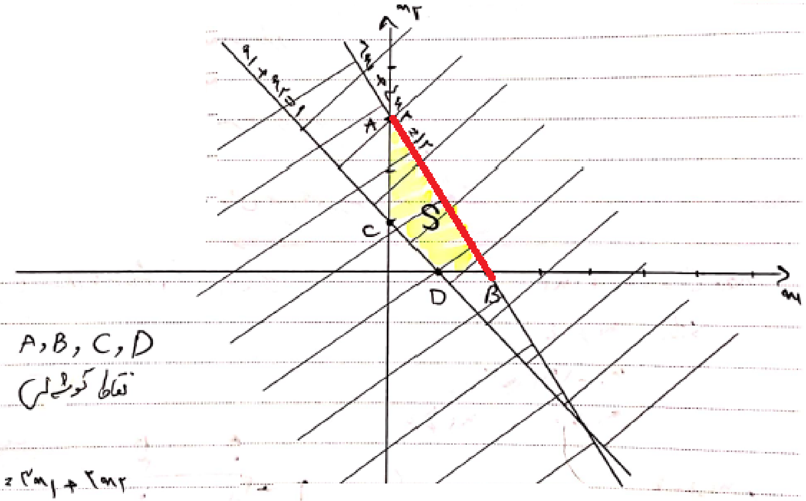
$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 12$ ✓

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + x_2 = 1$

	C	D
x_1	0	1
x_2	1	0

$(0,0) \Rightarrow 0 \geq 1$ ✗



A, B, C, D نقاط گوشه‌ای

$Z = 3x_1 + 2x_2$

$A(0,3) \Rightarrow \boxed{Z_A = 6}$ $\qquad C(0,1) \Rightarrow \boxed{Z_C = 2}$

$B(2,0) \Rightarrow \boxed{Z_B = 6}$ $\qquad D(1,0) \Rightarrow \boxed{Z_D = 3}$

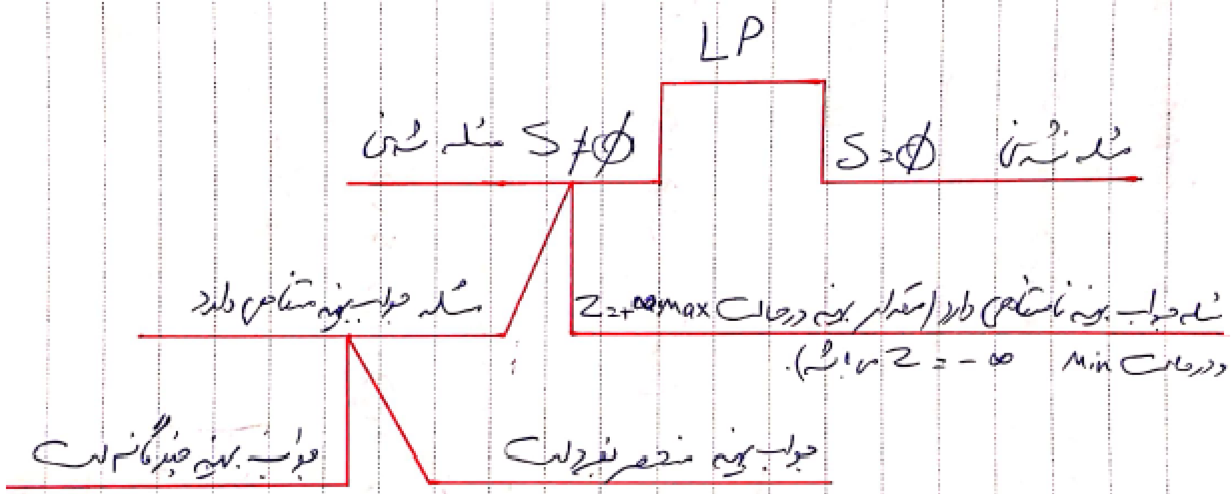
تمامی نقاط روی پاره‌خط AB جواب بهینه (مسئله ماکزیمم) می‌باشند و مقدار بهینه Z=6 است.

$$\overline{AB} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

C(0,1) جواب بهینه مسئله مینیمم است و مقدار بهینه Z=2 می‌باشد.

مسئله ماکزیمم جواب بهینه چندگانه دارد. مسئله مینیمم جواب بهینه منحصر به فرد دارد.

«حالات خاصی که در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با آن روبرو می‌شویم»



1) Max / Min $Z = 6x_1 + 2x_2$

s.t.: $2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 2$

$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$2x_1 - x_2 = 2$

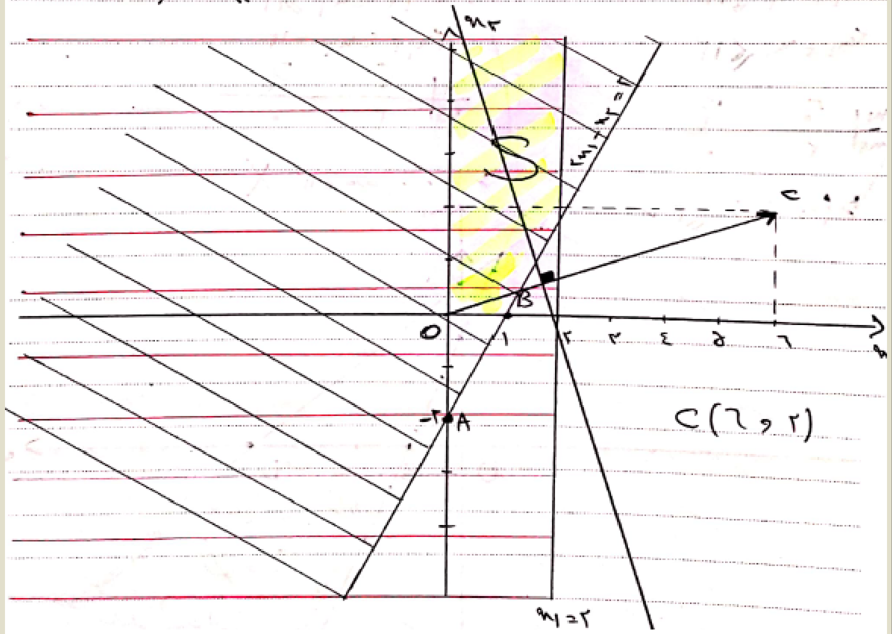
x_1	A: 0	B: 1
x_2	-2	0

$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 2$ ✓

$x_1 \leq 2$

$x_1 = 2$

$(0,0) \Rightarrow 0 \leq 2$ ✓



مسئله ماکزیمم جواب بهینه نامشخص دارد و مقدار بهینه $Z = +\infty$ است.

$O(0,0)$ جواب بهینه مسئله مینیمم است و مقدار بهینه $Z = 6(0) + 2(0) = 0$ است.