بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

درس تحقیق در عملیات ۲

جلسه دوم

استاد: اکرم سلطان‌پور

فهرست

فصل اول

برنامه‌ریزی خطی

(شکل ماتریسی تابلوی سیمپلکس و روش سمپلکس تجدیدنظر شده)

روش سیمپلکس تجدیدنظر شده

استفاده از روش سیمپلکس معمولی و به‌کارگیری عملیات جبری، مستلزم نگهداری تمامی عناصر جدول سیمپلکس در حافظه فعال رایانه است که ممکن است برای مسائل بزرگ[1] حافظه فعال کامپیوتر امکان تحلیل اطلاعات را نداشته باشد. مثالهای استفاده شده در بخش‌های قبلی این فصل نشان داد که با در دسترس بودن B^{-1} و مدل اصلی برنامه‌ریزی خطی می‌توان هر عنصر مورد نیاز از تابلو را بدست آورد. بنابراین بدون نگهداری تمام اطلاعات تابلوی سیمپلکس در حافظه رایانه، می‌توان فقط با داشتن B^{-1} به عنوان آرایه دائم در حافظه هر کدام عناصر را در مواقع نیاز استخراج نمود. این نکته بیانگر تفاوت اصلی روش سیمپلکس معمولی و روش سیمپلکس تجدیدنظر شده می‌باشد.

در روش سیمپلکس تجدیدنظر شده B^{-1} مستقیماً با معکوس کردن ماتریس ضرایب فنی متغیرهای اساسی قابل احتساب نمی‌باشد. بلکه این عمل با توجه به این خاصیت انجام می‌گیرد که ماتریس B فعلی و B_{New} تنها در یک ستون با هم دیگر تفاوت دارند یعنی ستون واردشونده جای ستون خروجی را می‌گیرد. نظریهٔ جبر ماتریس‌ها نشان می‌دهد که در این حالت می‌توان B^{-1}_{New} را از طریق B^{-1}_{old} (تکرار فعلی) و بردار ستون لولا (ستون متغیر ورودی) محاسبه کرد. در نتیجه ضرورتی به محاسبهٔ B^{-1} از روی ضرایب فنی متغیرهای اساسی در مدل اصلی نیست برای محاسبهٔ B^{-1}_{New} از روش حاصلضرب ماتریس بنیادی[1] استفاده می‌شود. رابطهٔ (۱۷) بیانگر نحوهٔ محاسبهٔ B^{-1}_{New} است.

$$B^{-1}_{New} = E.\,B^{-1}_{old}$$

در این رابطه E یک ماتریس بنیادی است، ماتریس بنیادی عبارت است از یک ماتریس مربع ناویژه که کلیهٔ ستونهای آن به استثنای یک ستون، همگی واحد باشند، برای مثال ماتریس زیر یک ماتریس بنیادی است.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید در یک تکرار سیمپلکس x_j متغیر ورودی و متغیر اساسی سطر r ام متغیر خروجی باشد، در این صورت ماتریس بنیادی تکرار سیمپلکس (E) ماتریسی است که ستون غیر یکه آن به صورت زیر می‌باشد

$$\gamma = \begin{bmatrix} -a_{1j}/a_{rj} \\ -a_{2j}/a_{rj} \\ \vdots \\ 1/a_{rj} \\ \vdots \\ -a_{mj}/a_{rj} \end{bmatrix}$$

عنصر لولا در سطر r ام

γ ستون غیر یکه مربوط به ماتریس بنیادی تابلوی سیمپلکس است. از تعریف γ چنین برمی‌آید که «عامل تعیین‌کنندهٔ ستون غیر یکه ماتریس بنیادی در هر تکرار سیمپلکس عنصر لولا است»

الگوریتم سیمپلکس تجدیدنظر شده را به صورت زیر خلاصه نمود:

قدم شروع : مدل برنامه‌ریزی خطی را با استفاده از متغیرهای کمکی (در صورت ضرورت متغیر مصنوعی) به فرم گسترده تبدیل کنید. این مرحله کاملاً شبیه روش سیمپلکس معمولی است. بردارهای C_j، P_j و b را معین کنید.

قدم تکرار : متغیرهای اساسی را معین کنید. سپس:

۱. بردارهای $\overline{P}_j$ و $\overline{C}_j$ و $\overline{b}$ را به روش ریاضی سیمپلکس محاسبه کنید یعنی:

$$\overline{P}_j = B^{-1}.P_j$$

$$Z_j - C_j = \overline{C}_j = C_B.\overline{P}_j - C_j$$

$$\overline{b} = B^{-1}.b$$

۲. منفی‌ترین مقدار $\overline{C}$ را به عنوان متغیر ورودی مشخص کنید و همچنین پس از مشخص کردن ستون ورودی آن را با $\overline{P}_j$ نشان دهید.

۳. حداقل حاصل‌تقسیم $\overline{b}$ بر مقادیر مثبت $\overline{P}_j$ را پس از محاسبه‌مشخص و با r نشان‌دهید.

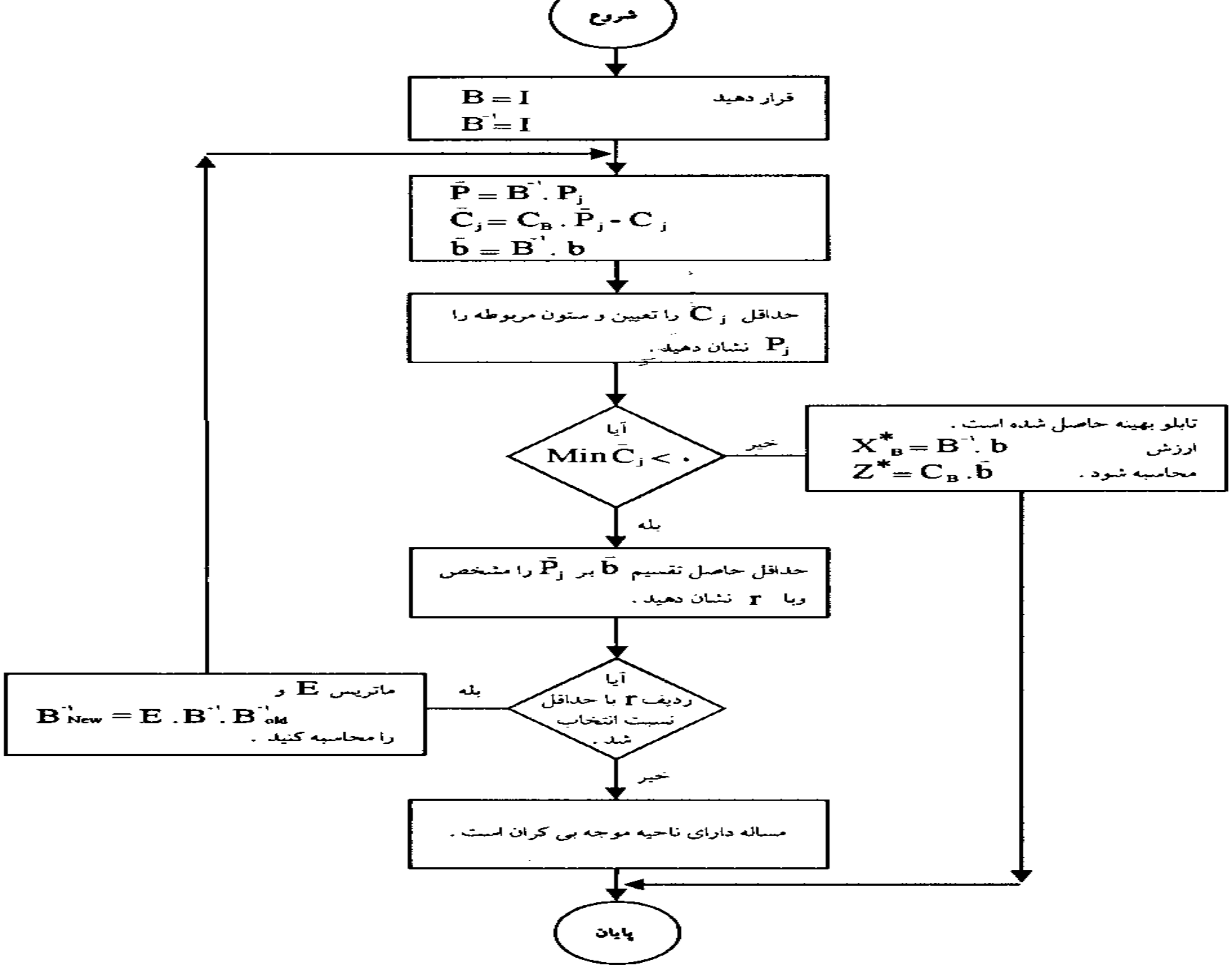
۴. عنصر لولا (a_{rj}) تعیین نموده و با استفاده از آن ستون غیریکه ماتریس بنیادی (ستون γ) را بنویسید. سپس B^{-1}_{New} را با استفاده از روابط زیر محاسبه کنید:

$$B^{-1}_{New} = E.B^{-1}_{old}$$

و به دنبال آن مقادیر متغیرهای اساسی را تعیین نمایید.

$$X_B = B^{-1}.b = \overline{b}$$

قدم توقف : شرط بهینگی جواب را تحقیق کنید، در صورتی که شرط بهینگی برقرار باشد توقف کرده و جواب‌ها را استخراج نمایید در غیر اینصورت به قدم تکرار برگردید.



فلوچارت سیمپلکس تجدیدنظر شده.

مثال مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید و آن را با استفاده از سیمپلکس تجدیدنظر شده حل کنید.

$$\text{Max} \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 14 \\ x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

قدم شروع : مسأله را همانند روش سیمپلکس معمولی با استفاده از متغیرهای کمکی به فرم گسترده تبدیل کنید.

$$\text{Max} \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + S_1 \qquad\qquad &= 10 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + S_2 \qquad &= 12 \\ x_2 \qquad\qquad + S_3 &= 9 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

در این مرحله متغیرهای اساسی عبارتند از: (S_1, S_2, S_3) بنابراین عناصر تابلوی اول سیمپلکس به صورت زیر خواهد بود:

$$B^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = [3 \quad 2] \qquad P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

قدم تکرار

تکرار اول : با توجه به اینکه B^{-1} یک ماتریس یکه است بنابراین.

$$\overline{P}_{x_1} = P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{P}_{x_2} = P_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \overline{C}_{x_1} = -C_{x_1} = -3$$

$$\overline{C}_{x_2} = -C_{x_2} = -2$$

متغیر ورودی در تکرار اول x_1 خواهد بود زیرا دارای منفی‌ترین $\overline{C}_j$ می‌باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{ستون لولا} \longleftarrow \quad \overline{P}_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

از حاصل تقسیم $\overline{b}$ بر $\overline{P}_{x_1}$ مشخص می‌گردد که حداقل نسبت مربوط به سطر دوم است. بنابراین متغیر خروجی S_2 خواهد بود، با استفاده از شماره سطر عنصر لولا مشخص می‌شود که ستون دوم ماتریس بنیادی غیریکه می‌گردد. طبق تعریف γ خواهیم داشت:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$B^{-1}_{New} = E.B^{-1}_{old} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال به تکرار دوم می‌رویم.

تکرار دوم : از آنجایی که براساس تکرار اول متغیر ورودی x_1 و متغیر خروجی S_2 است بنابراین متغیرهای اساسی به شرح زیر خواهند بود:

$$X_B = (S_1, x_1, S_3)$$

و به تبع آن :

$$C_B = (0 \quad 3 \quad 0)$$

می‌باشد. به کمک B^{-1}_{New} در تکرار اول درمی‌یابیم که ماتریس ضرایب فنی متغیرهای آغازین سیمپلکس به صورت زیر می‌باشد:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین براساس B^{-1} و اطلاعات مدل مثال خواهیم داشت:

$$\overline{P}_{x_2} = B^{-1}.P_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P}_{S_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_{x_2} = C_B.\overline{P}_{x_2} - C_{x_2} = (0 \quad 3 \quad 0) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{C}_{S_2} = (0 \quad 3 \quad 0) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = +\frac{3}{2}$$

واضح است که $\overline{C}$ متغیرهای S_1 و x_1 و S_3 به عنوان متغیرهای اساسی در این تکرار برابر صفر می‌باشد. بنابراین متغیر ورودی در این تکرار x_2 خواهد بود بنابراین به منظور تعیین متغیر خروجی می‌بایست بردار $\overline{P}_{x_2}$ و $\overline{b}$ را تشکیل دهیم:

$$\overline{B} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P}_{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

از حاصل تقسیم $\overline{b}$ بر $\overline{P}_{x_2}$ خواهیم داشت:

$$\text{Min}\left\{\frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{6}{\frac{1}{2}}, \frac{9}{1}\right\} = 8$$

بنابراین از آنجایی که مقدار حداقل مربوط به S_1 می‌باشد، این متغیر می‌بایست به عنوان متغیر خروجی انتخاب شود. بنابراین در ستون لولا عنصر سطر اول عدد لولا خواهد بود. به عبارت دیگر:

$$\overline{P}_{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

بدین صورت ماتریس بنیادی تکرار دوم و B^{-1}_{New} به صورت زیر تشکیل خواهد شد.

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}_{New} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}_{New} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار سوم : متغیرهای اساسی این تکرار عبارتند از : (x_2, x_1, S_3)

لذا بردار ضرایب متغیرهای اساسی در تابع هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$C_B = (2 \quad 3 \quad 0)$$

بنابراین می‌بایست $\overline{C}_j$ را به منظور بررسی شرط بهینگی تابلوی جدید بررسی کنیم. بدین منظور ابتدا $\overline{P}_j$ برای متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌شود.

$$\overline{P}_{S_1} = \begin{bmatrix} +2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_{S_1} = (2 \quad 3 \quad 0) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$$\overline{P}_{S_2} = (2 \quad 3 \quad 0) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

از آنجایی که $\overline{C}$ به ازای کلیهٔ متغیرهای غیراساسی غیرمنفی است، بنابراین تکرار سوم تابلوی بهینهٔ سیمپلکس را نشان خواهد داد. از اینرو می‌بایست جواب بهینه را استخراج نمود.

$$X_B = B^{-1}.b = \overline{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید

$$x_1^* = 2$$

$$x_2^* = 8$$

$$Z^* = C_B.\overline{b} = (2 \quad 3 \quad 0) \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 22$$

تمرینات

۳. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Max} \quad Z = ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۵x_۳$$

s.t :

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \leq ۴۳۰$$
$$۳x_۱ + ۲x_۳ \leq ۴۶۰$$
$$x_۱ + ۴x_۲ \leq ۴۲۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

جواب بهینهٔ مدل را با استفاده از سیمپلکس تجدیدنظر شده بدست آورید.

۴. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad Z = x_۱ - ۲x_۲$$

s.t :

$$x_۱ - x_۲ \geq ۵$$
$$x_۱ + x_۲ \geq ۶$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

جواب بهینهٔ مدل را با استفاده از روش سیمپلکس تجدیدنظر شده بدست آورید.

موفق و سلامت باشید