بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

درس تحقیق در عملیات ۲

جلسه چهارم

استاد: اکرم سلطان‌پور

ادامه مبحث تحلیل حساسیت

بررسی اثر تغییر در ضرایب فنی (a_{ij}): با توجه به روابط کلیدی تغییر در (a_{ij})

بر $z_j - c_j$ و $c_B B^{-1} a_j$ و $B^{-1} a_j$ تأثیر دارد.

الف- اگر تغییر در ضرایب فنی متغیرهای غیرپایه‌ای در جدول بهینه رخ دهد فقط ستون مربوطه خود را عوض می‌کند در صورتی که مسئله از بهینگی خارج شود مسئله حساس است در غیراین صورت مسئله حساس نمی‌باشد.

ب- اگر تغییر در ضرایب فنی متغیرهای پایه‌ای جدول نهایی رخ دهد بعد از محاسبه‌ی $B^{-1} a_j$ و $c_B B^{-1} a_j - c_j$ جدول باید یکه شود و بعد از آن در صورتی که شرط بهینگی مختل شود مسئله حساس است در غیراین صورت اگر هیچ تغییری در مقدار بهینه و جواب بهینه ایجاد نشود مسئله حساس نخواهد بود و گرنه حساس ضعیف خواهد بود

مثال: مسئله زیر به همراه جدول بهینه آن را در نظر بگیرید.

$$\max Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 100$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	1	0	4	3	0	300
x_2	0	1	1	2	1	1	100
s_2	0	1	0	0	-1	1	20

خواهد است؟

الف) فرض کنید میزان مصرف x_3 از مواد اولیه (a_{23}) از ۲ به ۱ کاهش یابد چه تأثیری

ب) فرض کنید میزان مصرف x_2 از مواد اولیه (a_{12}) از ۲ به $\frac{1}{2}$ کاهش یابد چه تأثیری خواهد داشت؟

ج) فرض کنید a_2 از $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ تغییر کند چه تأثیری خواهد داشت؟

الف)

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	1	0	4	3	0	300
x_2	0	1	1	2	1	0	100
s_2	0	1	0	-1	-1	1	20

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مسئله نسبت به این تغییر حساس نیست و جواب بهینه همان قبلی خواهد بود

$$B^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} a_3 - c_3 = (300) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 = 4$$

ب)

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b	θ
Z	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	3	0	300	$\frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$
x_2	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1	0	100	
s_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	1	20	$\frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$
Z	1	$\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	310	
x_2	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	90	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	40	

[تا زمانی که جدول را ادامه می‌دهیم فرمول‌های به دست آمدن متغیرهای پایه‌ای و حاشیه‌ی سیستم باید فرمول‌ها را خودمان حساب کنیم]

$$B^{-1}a_{x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

مسئله حساس قوی است

$$c_B B^{-1}a_{x_3} - c_{x_3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

جواب بهینه
$x_2 = \frac{2}{3}$
$x_4 = \frac{4}{3}$
$x_1 = 0$
$s_1 = 0$
$s_2 = 0$

جدید

Z مقدار بهینه $= \frac{9200}{3}$

ج)

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	1	$-\frac{3}{2}$	4	3	0	300
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	2	1	0	100
s_2	0	1	0	0	-1	1	20
Z	1	4	0	10	6	0	600
x_2	0	2	1	4	2	0	200
s_2	0	1	0	0	-1	1	20

$$B^{-1}a_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1}a_{x_2} - c_{x_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

MICRO

$$\text{سطر جایگزین لولا} = \frac{\text{سطر لولا}}{\text{عضو لولا}} = \frac{(0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{1} \quad 1 \quad 0 \quad 100)}{\frac{1}{2}} = (0 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 200)$$

$$\text{سطر جدید} = \text{سطر قدیم} - (\text{عضو متناظر با آن سطر در ستون لولا})(\text{سطر جایگزین لولا})$$

$$Z \text{ جدید} = (1 \quad -\tfrac{3}{2} \quad 4 \quad 3 \quad 0 \quad 300) - (-\tfrac{3}{2})(0 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 200) + (0 \quad \tfrac{3}{2} \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 300)$$

$$= (1 \quad 4 \quad 0 \quad 10 \quad 6 \quad 0 \quad 600)$$

مسئله حساس ضعیف است. جواب بهینه جدید

جواب بهینه
$x_2 = 200$
$s_2 = 20$
$x_1 = x_3 = s_1 = 0$

$Z = 600$

اضافه شدن یک محدودیت جدید:

به منظور تحلیل حساسیت یک مسئله نسبت به محدودیت جدید مقادیر متغیرهای متناظر با جواب بهینه به دست آمده از مسئله اصلی را در محدودیت قرار می دهیم

اگر در محدودیت صدق کند مسئله حساس نیست در غیر این صورت مسئله حساس می باشد

درصورت تمایل به حل مسئله به صورت زیر عمل می کنیم:

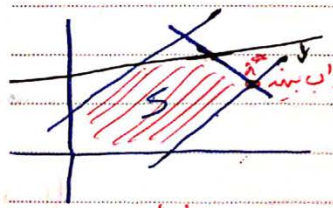
* به ازای هر محدودیت یک سطر (متناظر با محدودیت) و لااقل یک ستون (متناظر با متغیر یا به ای محدودیت جدید) به جدول اضافه می گردد. * جدول یکه می شود.

* درصورت اختلال در بهینگی یا شدنی شدن مسئله حساس قوی می باشد در غیر این صورت حساس ضعیف می باشد و درصورت لزوم باید جدول بهینه جدید را پیدا کرد.

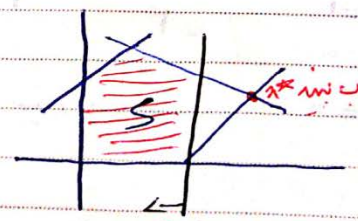
انواع محدودیت:

۱- محدودیت زائد: محدودیتی که اضافه کردن آن ناحیه و جواب بهینه را تغییر نمی دهد.

۲- محدودیت مؤثر: محدودیتی که اضافه کردن آن ناحیه شدنی و جواب بهینه را تغییر می دهد.



زائد



مؤثر

* برای اینکه بفهمیم محدودیتی زائد است یا مؤثر کافی است جواب بهینه را در آن جایگذاری کنیم اگر جواب بهینه در محدودیت صدق کرد محدودیت یک محدودیت زائد است و جواب بهینه را تغییر خواهد داد. در غیر این صورت یک محدودیت مؤثر بوده و جواب بهینه را تغییر خواهد داد و باید جواب بهینه جدید را به دست آورد.

مثال) مسئله زیر را به همراه جدول بهینه آن را در نظر بگیرید.

$Max Z = 2x_1 + x_2$

$s.t.\ x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	b
Z	1	0	1	2	0	4
x_1	0	1	1	1	0	2
s_2	0	0	2	-1	1	1

الف) اثر اضافه شدن محدودیت $x_1 + 2x_2 \leq 4$ بر مسئله چه می باشد؟

ب) اثر اضافه شدن محدودیت $2x_1 + x_2 \leq 3$ بر مسئله چه می باشد؟

الف)

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$2 + 2(0) \leq 4$

$2 \leq 4$ ✓

محدودیت یک محدودیت زائد است و جواب بهینه را تغییر نمی دهد.

جواب بهینه: $x_1 = 2$, $s_2 = 1$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$

$Z = 4$ مقدار بهینه

ب)

$2x_1 + x_2 \leq 3$

$2(2) + 0 \leq 3$

$4 \not\leq 3$ ✗

$2x_1 + x_2 + s_3 = 3$ ← این را به جدول اضافه می کنیم

* محدودیت مؤثر است و جواب بهینه را تغییر خواهد داد.

Subject : گزینه‌ی ج و د را خودم حل کردم مطمئن نیستم درست است یا نه در کلاس هم حل نشد

Date

ج) $2x_1+3x_2 \le 2$ د) $x_1+3x_2 \le 5$

د) $x_1+3x_2 \le 5 \xrightarrow{\text{با توجه به جواب بهینه}} 2+3(0) \le 5 \Rightarrow 2 \le 5$ محدودیت از نوع زائد

ج) $2x_1+3x_2 \le 2 \xrightarrow{\text{با توجه به جواب بهینه}} 2(2)+3(0) \le 2 \Rightarrow 4 \not\le 2$ محدودیت از نوع مؤثر

$2x_1+3x_2+s_3=2$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	1	2	0	0	4
x_1	0	1	1	1	0	0	2
s_2	0	0	2	-1	1	0	1
s_3	0	2	3	0	0	1	2
Z	1	0	1	2	0	0	4
x_1	0	1	1	1	0	0	2
s_2	0	0	2	-1	1	0	1
s_3	0	0	1	-2	0	1	-2
θ		—	—	$\frac{2}{-2}$	—	—	
Z	1	0	2	0	0	1	4
x_1	0	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
s_2	0	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	2
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1

جواب بهینه $\begin{cases} x_1=1 \\ s_2=2 \\ s_1=1 \\ x_2=0 \\ s_3=0 \end{cases}$ مقدار بهینه $Z=2$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	1	2	0	0	4
x_1	0	1	1	1	0	0	2
s_2	0	0	2	-1	1	0	1
s_3	0	0	-1	-2	0	1	-1
θ		—	$\frac{1}{-1}$	$\frac{2}{-2}$	—	—	
Z	1	0	0	0	0	1	3
x_1	0	1	0	-1	0	1	1
s_2	0	0	0	-5	1	2	-1
x_2	0	0	1	2	0	-1	1
θ		—	—	$\frac{0}{-5}$	—	—	
Z	1	0	0	0	0	1	3
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
s_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

s_3 کجدیه $= (0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 3) - (2)(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2)$

$+ (0\ -2\ -2\ -2\ 0\ 0\ -1)$

$0\ 0\ -1\ -2\ 0\ 1\ -1$

این s_3 کجدیه مال جدول اولی است بقیه جدول که با جدول دوستان و یا سایر جدول حل می‌شود فرمول‌ها را استاد نوشته‌است فقط جواباش را نوشت و خودمان باید حل کنیم تا به جواب ها برسیم

جواب بهینه $\begin{cases} x_1=\frac{6}{5} \\ s_1=\frac{1}{5} \\ x_2=\frac{3}{5} \end{cases}$ $s_2=s_3=0$ $Z=3$

R_3 جديد $= (0\ 2\ 3\ 0\ 0\ 1\ 2) - (2)(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2)$

$+ \dfrac{(0\ -2\ -2\ -2\ 0\ 0\ -3)}{(0\ 0\ 1\ -2\ 0\ 1\ -2)}$

$= \dfrac{(0\ 0\ 1\ -2\ 0\ 1\ -2)}{-2}$ ← سطر جديد للإجابة

$(0\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1)$

Z جديد $= (1\ 0\ 1\ 2\ 0\ 0\ 2) - (2)(0\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1)$

$+ (0\ 0\ 1\ -2\ 0\ 1\ -2)$

R_1 جديد $= (1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ 0\ 2) - (1)(0\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1)$

$+ (0\ 0\ \frac{1}{2}\ -1\ 0\ \frac{1}{2}\ -1)$

$(1\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\ \frac{3}{2}\ 0)$

R_2 جديد $= (1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ 0\ 2) - (-1)(0\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1)$

$(0\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 1)$

$(0\ 0\ 0\ \frac{3}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\ 2)$

موفق و سلامت باشید